MATHEMATICAL LOGIC

# DIE GENTZENSCHEN SCHLUSZVERFAHREN IN MODALEN AUSSAGENLOGIKEN. III*

VON

J. RIDDER

(Communicated at the meeting of September 28, 1957)

In diesem Supplement zu Teil III findet man: 1° Angabe der hinzukommenden (den Umfang nicht ändernden) Schemata für den Kalkül $LG_1^{(g)}$ [für $LG_1^{(b)}$] (III, § $14^{\text{bis}}$) und für weitere Kalküle (in III, § 15), die notwendig sind zur Erhaltung der Gültigkeit der zugehörigen Hauptsätze (dieser Paragraphen); 2° kurze Mitteilungen über die Ergänzungen der zugehörigen Beweise.

§ 11. *Fügt man den Schemata $P$, $Q$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $UES$, $UEA$, $FES$, $FEA$, $X_1$, $Y_1^0$, $\Delta$ von $LG_1^{(g)}$ [den Schemata $P$, $Q$, $A_1$, ..., $Y_1^0$, $\Delta$, $Z_1$ von $LG_1^{(b)}$] hinzu das Schema $\Delta^* \cdot \dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{P}}{\mathrm{N}\mathfrak{A} \to \mathrm{N}\mathfrak{P}}$ [das Schema $\Delta^*$. und das Schema $Z_1^* \cdot \dfrac{\mathrm{N}\mathfrak{A} \to \mathfrak{P}}{\mathrm{N}\mathfrak{A} \to \mathrm{N}\mathfrak{P}}$],* so bleibt dabei der Umfang des Kalküls $LG_1^{(g)}$ [des Kalküls $LG_1^{(b)}$] ungeändert.

*Der Wortlaut des in Teil III, § $14^{\text{bis}}$ dieser Arbeit gegebenen Hauptsatzes für $LG_1^{(g)}$ [für $LG_1^{(b)}$] kann dann ungeändert beibehalten werden.*

§ 12. Ergänzung des loc. cit. angedeuteten Beweises für den obigen Hauptsatz von $LG_1^{(g)}$. Die Hinzufügungen sind von analoger Art wie die in Teil I*, § 3 dieser Arbeit für den in I*, § 2 (und I, § 1) betrachteten Hauptsatz. Wir wollen hier nur auf einige spezielle Punkte hinweisen.

Neben $(b_2^{m_2})$ (I, § 1) kommt hier:

$$\dfrac{\overline{\mathfrak{A}} \to \nu \qquad \dfrac{\nu \to \mathfrak{P}}{\nu \to \mathrm{N}\mathfrak{P}}\,(\Delta)}{\overline{\mathfrak{A}} \to \mathrm{N}\mathfrak{P}}\,(M).$$

Dies ist eine erlaubte Mischung [21]), braucht somit nicht eliminiert zu werden.

Neben $(b_3^{m_2})$ (I*, § 3) kommt hier:

$$\dfrac{\overline{\mathfrak{C}} \to \mathfrak{Q} \qquad \dfrac{\overline{\mathfrak{P}} \to \nu \qquad \overline{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{B}}{\overline{\mathfrak{P}} \cdot \overline{\mathfrak{A}}^0 \to \mathfrak{B}}\,(\text{erl. } M)}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^* \cdot \overline{\mathfrak{A}}^{0*} \to \mathfrak{B}}\,(M)$$

[21]) Wir wollen sie im weiteren Verlauf auch als erlaubt betrachten, falls $\overline{\mathfrak{A}}$ einen oder mehrere Faktoren $\nu$ enthält; denn dieser Fall läßt sich leicht auf den im Hauptsatz von III, § $14^{\text{bis}}$ zugelassenen Fall und Schemata $Q$, $\Delta$ zurückführen.

Enthält $\overline{\mathfrak{A}}$ keine Faktoren $\mathfrak{Q}$, so läßt $(M)$ sich eliminieren:

$$(Q, A_1)\ \dfrac{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{P}}^*\to\nu \qquad\qquad \overline{\mathfrak{A}}\to\mathfrak{B}}{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{P}}^*\cdot\overline{\mathfrak{A}}^0\to\mathfrak{B},\ \text{d.i. } \overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{P}}^*\cdot\overline{\mathfrak{A}}^{0*}\to\mathfrak{B}}\ (\text{erl. } M)$$

Enthält $\overline{\mathfrak{A}}$ einen oder mehrere Faktoren $\mathfrak{Q}$, so gibt es Rangerniedrigung von $(M)$:

$$\dfrac{\dfrac{(Q, A_1)\ \overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{P}}^*\to\nu \qquad \dfrac{\overline{\mathfrak{C}}\to\mathfrak{Q} \qquad \overline{\mathfrak{A}}\to\mathfrak{B}}{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{A}}^*\to\mathfrak{B}}\,(M)}{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{P}}^*\cdot\overline{\mathfrak{C}}^0\cdot\overline{\mathfrak{A}}^{*0}\to\mathfrak{B}}\,(\text{erl. } M)}{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{P}}^*\cdot\overline{\mathfrak{A}}^{0*}\to\mathfrak{B}}\,(A_j)$$

Der neben $(b_3^{m_3})$ (I*, § 3) kommende Fall führt zur Sequenz $\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{P}}^{**}\to\mathfrak{Q}$; zu bemerken ist, daß für $\mathfrak{Q}\equiv\nu$ sofortige Elimination von $(M)$ mittels Schema $Q$ möglich ist [22]). Dasselbe gilt für die neben $(d_3^{m_j})$ $(j=1, 2, 3)$ (I*, § 3) kommenden Fälle bei $\mathfrak{S}\equiv\nu$.

[22]) Es möge hier auf folgende, etwas abweichende Reduktion des mit Teil I*, § 3, $\beta_3$, drittes erlaubtes Mischungsschema übereinkommenden Falles hingewiesen werden:

$$\dfrac{\overline{\mathfrak{C}}\to \mathrm{N}(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}) \qquad \dfrac{\mathrm{N}(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B})\to(\mathrm{N}\mathfrak{A}\subset\mathrm{N}\mathfrak{B}) \qquad \dfrac{\overline{\mathfrak{R}}\to\nu \qquad \overline{\mathfrak{T}}\to\mathfrak{Q}}{\overline{\mathfrak{R}}\cdot\overline{\mathfrak{T}}^0\to\mathfrak{Q},\ \text{d.i. } \overline{\mathfrak{P}}\to\mathfrak{Q}}\,(\text{erl. } M)}{\mathrm{N}(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B})\cdot\overline{\mathfrak{R}}^*\cdot\overline{\mathfrak{T}}^{0*}\to\mathfrak{Q},\ \text{d.i. } \mathrm{N}(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B})\cdot\overline{\mathfrak{P}}^*\to\mathfrak{Q}}\,(\text{erl. } M)}{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{R}}^{**}\cdot\overline{\mathfrak{T}}^{0**}\to\mathfrak{Q},\ \text{d.i. } \overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{P}}^{**}\to\mathfrak{Q}}\,(M)$$

Es gibt folgende drei Möglichkeiten: 1° $\overline{\mathfrak{T}}$ enthält keine Faktoren $\mathrm{N}(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B})$, $\mathrm{N}\mathfrak{A}\subset\mathrm{N}\mathfrak{B}$; dann läßt $(M)$ sich eliminieren:

$$(Q, A_j)\ \dfrac{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{R}}^{**}\to\nu \qquad\qquad \overline{\mathfrak{T}}\to\mathfrak{Q}}{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{R}}^{**}\cdot\overline{\mathfrak{T}}^0\to\mathfrak{Q},\ \text{d.i. } \overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{P}}^{**}\to\mathfrak{Q}}\ (\text{erl. } M);$$

2° $\overline{\mathfrak{T}}$ enthält $\mathrm{N}\mathfrak{A}\subset\mathrm{N}\mathfrak{B}$ als Faktor; die Rangzahl der (ursprünglich zweiten) erl. $M$. läßt sich erniedrigen:

$$\dfrac{\dfrac{(Q, A_j)\ \overline{\mathfrak{C}}\to\nu \qquad \dfrac{\overline{\mathfrak{C}}\to\mathrm{N}(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}) \qquad \dfrac{\mathrm{N}(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B})\to(\mathrm{N}\mathfrak{A}\subset\mathrm{N}\mathfrak{B}) \qquad \overline{\mathfrak{T}}\to\mathfrak{Q}}{\mathrm{N}(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B})\cdot\overline{\mathfrak{T}}^*\to\mathfrak{Q}}\,(\text{erl. } M)}{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{T}}^{**}\to\mathfrak{Q}}\,(M)}{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{C}}^0\cdot\overline{\mathfrak{T}}^{**0}\to\mathfrak{Q}}\,(\text{erl. } M)}{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{P}}^{**}\to\mathfrak{Q}}\,(A_j);$$

3° $\overline{\mathfrak{T}}$ enthält $\mathrm{N}(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B})$, dagegen nicht $\mathrm{N}\mathfrak{A}\subset\mathrm{N}\mathfrak{B}$ als Faktor; die Rangzahl von $(M)$ läßt sich erniedrigen:

$$\dfrac{\dfrac{(Q, A_j)\ \overline{\mathfrak{C}}\to\nu \qquad \dfrac{\overline{\mathfrak{C}}\to\mathrm{N}(\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}) \qquad \overline{\mathfrak{T}}\to\mathfrak{Q}}{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{T}}^*\to\mathfrak{Q}}\,(M)}{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{C}}^0\cdot\overline{\mathfrak{T}}^{*0}\to\mathfrak{Q}}\,(\text{erl. } M)}{\overline{\mathfrak{C}}\cdot\overline{\mathfrak{P}}^{**}\to\mathfrak{Q}}\,(A_j).$$

Der neben $(d_3^{m_3})$ tretende Fall ist:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\mathfrak{C}} \to \nu \qquad \overline{\mathfrak{P}} \to \mathfrak{B}}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^0 \to \mathfrak{B}}\,(\text{erl. } M) \qquad \overline{\mathfrak{U}} \to \mathfrak{S}}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^0 \cdot \overline{\mathfrak{U}}^* \to \mathfrak{S}}\,(M)$$

Rangerniedrigung von $(M)$ ist hier einfach:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\mathfrak{C}} \to \nu \qquad \dfrac{\overline{\mathfrak{P}} \to \mathfrak{B} \qquad \overline{\mathfrak{U}} \to \mathfrak{S}}{\overline{\mathfrak{P}} \cdot \overline{\mathfrak{U}}^* \to \mathfrak{S}}\,(M)}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^0 \cdot \overline{\mathfrak{U}}^{*0} \to \mathfrak{S}}\,(\text{erl. } M)}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^0 \cdot \overline{\mathfrak{U}}^* \to \mathfrak{S}}\,(A_j \text{ ev.})$$

§ 13. Ergänzung des loc. cit. angedeuteten Beweises für den obigen Hauptsatz von $LG_1^{(b)}$. Die Hinzufügungen sind von analoger Art wie die in Teil I*, § 5 dieser Arbeit für den in I*, § 4 (und I, § 4) betrachteten Hauptsatz. Auf einige spezielle Punkte auch für diesen Fall wurde im vorigen Par. hingewiesen.

§ 14. *Fügt man den Schemata von* $LG_2^{(g)}$, *d.h. denjenigen von* $LG_1^{(g)}$ (§ 11), *vermehrt mit OEA, OES [den Schemata von* $LG_2^{(b)}$, *d.h. denjenigen von* $LG_1^{(b)}$ (§ 11), *vermehrt mit OEA, OES] hinzu das Schema* $\Delta^*$ *[die Schemata* $\Delta^*, Z_1^*$], so bleibt der Umfang des Kalküls $LG_2^{(g)}$ [des Kalküls $LG_2^{(b)}$] ungeändert.

*Der Wortlaut des in Teil III,* § 15 *dieser Arbeit gegebenen Hauptsatzes für* $LG_2^{(g)}$ *[für* $LG_2^{(b)}$*] kann dann ungeändert beibehalten werden.*

Für die Beweise vergleiche Teil I*, §§ 3 u. 5; Teil II*, § 6; siehe auch hier § 12.

§ $14^{\text{bis}}$. *Fügt man den Schemata von* $LM^{(g)}$, *d.h. denjenigen von* $LG_2^{(g)}$ (§ 14), *vermehrt mit NES, NEA [den Schemata von* $LM^{(b)}$, *d.h. denjenigen von* $LG_2^{(b)}$ (§ 14), *vermehrt mit NES, NEA] hinzu das Schema* $\Delta^*$ *[die Schemata* $\Delta^*, Z_1^*$], so bleibt der Umfang des Kalküls $LM^{(g)}$ [des Kalküls $LM^{(b)}$] ungeändert.

*Der Wortlaut des in Teil III,* § 15 *dieser Arbeit gegebenen Hauptsatzes für* $LM^{(g)}$ *[für* $LM^{(b)}$*] kann dann ungeändert beibehalten werden.*

Für die Beweise vergleiche Teil I*, §§ 3 u. 5; Teil II*, §§ 6, $6^{\text{bis}}$; siehe auch hier § 12.

§ $14^{\text{ter}}$. *Fügt man den Schemata von* $LI^{(g)}$, *d.h. denjenigen von* $LM^{(g)}$ (§ $14^{\text{bis}}$), *vermehrt mit Schema* $I \cdot \dfrac{\overline{\mathfrak{A}} \to \lambda}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}$ *[den Schemata von* $LI^{(b)}$, *d.h. denjenigen von* $LM^{(b)}$ (§ $14^{\text{bis}}$), *vermehrt mit Schema I.] hinzu das Schema* $\Delta^*$ *[die Schemata* $\Delta^*, Z_1^*$], so bleibt der Umfang des Kalküls $LI^{(g)}$ (des Kalküls $LI^{(b)}$] ungeändert.

*Der Wortlaut des in Teil III,* § 15 *gegebenen Hauptsatzes für* $LI^{(g)}$ *[für* $LI^{(b)}$*] kann dann ungeändert beibehalten werden.*

Für die Beweise vergleiche Teil I*, §§ 3 u. 5; Teil II*, §§ 6, $6^{\text{bis}}$, $6^{\text{ter}}$, 7; siehe auch hier § 12.

§ 15. Fügt man den in Form. B. V, § 37 gegebenen Schemata von $LK$ hinzu die Schemata $X_1^0$, $Y_1^0$ und $\varDelta$:

$$X_1^0 \cdot \frac{\mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{D}} \to \overline{\mathfrak{B}}}{\mathbf{N}\mathfrak{A} \cdot \overline{\overline{\mathfrak{D}}} \to \overline{\overline{\mathfrak{B}}}}; \qquad Y_1^0 \cdot \mathbf{N}(\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) \to (\mathbf{N}\mathfrak{A} \subset \mathbf{N}\mathfrak{B}); \qquad \varDelta \cdot \frac{\nu \to \mathfrak{P}}{\nu \to \mathbf{N}\mathfrak{P}},$$

so charakterisiert dieses System den Kalkül $LK^{(g)}$. *Fügt man nochmals das Schema* $\varDelta^*$ (§ 11) *hinzu*, so bleibt der Umfang des Kalküls $LK^{(g)}$ derselbe.

*Der Wortlaut des in Teil III*, § 15, 4° *gegebenen Hauptsatzes für* $LK^{(g)}$ *kann dann ungeändert beibehalten werden.*

Für die Beweise vergleiche Teil II*, § 8 und die folgenden Bemerkungen.

Neben $(b_2^{m_4})$ (II, § 7) kommt hier:

$$\frac{\overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}} \qquad \dfrac{\nu \to \mathfrak{P}}{\nu \to \mathbf{N}\mathfrak{P}}\,(\varDelta)}{\overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}}^* + \mathbf{N}\mathfrak{P}}\,(M^0)$$

Dies ist eine erlaubte Mischung, braucht somit nicht eliminiert zu werden.

Neben $(b_3^{m_2}{}_0)$ (II*, § 8) kommt hier:

$$\frac{\overline{\mathfrak{C}} \to \overline{\mathfrak{Q}} \qquad \dfrac{\overline{\mathfrak{P}} \to \overline{\mathfrak{S}} \qquad \overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}} \quad (\text{Mischformel } \nu)}{\overline{\mathfrak{P}} \cdot \overline{\mathfrak{A}}^0 \to \overline{\mathfrak{S}}^0 + \overline{\mathfrak{B}}}\,(\text{erl. } M^0)}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^* \cdot \overline{\mathfrak{A}}^{0*} \to \overline{\mathfrak{Q}}^* + \overline{\mathfrak{S}}^0 + \overline{\mathfrak{B}}}\,(M^0)$$

Enthält $\overline{\mathfrak{A}}$ keine Faktoren $\mathfrak{T}$ [$\mathfrak{T}$ Mischformel von $(M^0)$; diese ist $\not\equiv \nu$], so läßt $(M^0)$ sich eliminieren (es ist $\overline{\mathfrak{A}}^{0*} \equiv \overline{\mathfrak{A}}^0$):

$$\frac{\dfrac{(Q, A_1)\ \overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^* \to \nu \qquad \overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}}}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^* \cdot \overline{\mathfrak{A}}^0 \to \overline{\mathfrak{B}}}\,(\text{erl. } M^0)}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^* \cdot \overline{\mathfrak{A}}^0 \to \overline{\mathfrak{Q}}^* + \overline{\mathfrak{S}}^0 + \overline{\mathfrak{B}}}\,(A_j^*)$$

Enthält $\overline{\mathfrak{A}}$ einen oder mehrere Faktoren $\mathfrak{T}$, so gibt es Rangerniedrigung von $(M^0)$:

$$\frac{\dfrac{(Q, A_1)\ \overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^* \to \nu \qquad \dfrac{\overline{\mathfrak{C}} \to \overline{\mathfrak{Q}} \qquad \overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}}}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{A}}^* \to \overline{\mathfrak{Q}}^* + \overline{\mathfrak{B}}}\,(M^0)}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^* \cdot \overline{\mathfrak{C}}^0 \cdot \overline{\mathfrak{A}}^{*0} \to \overline{\mathfrak{Q}}^* + \overline{\mathfrak{B}}}\,(\text{erl. } M^0)}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^* \cdot \overline{\mathfrak{A}}^{0*} \to \overline{\mathfrak{Q}}^* + \overline{\mathfrak{S}}^0 + \overline{\mathfrak{B}}}\,(A_j, A_j^*)$$

Der neben $(b_3^{m_3}{}_0)$ (II*, § 8) kommende Fall führt zur Sequenz $\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^{*0} \to \overline{\mathfrak{D}}^0 + \overline{\mathfrak{Q}}$; zu bemerken ist daß, falls $\overline{\mathfrak{D}}^0 + \overline{\mathfrak{Q}}$ einen Term $\nu$ enthält, sofortige Elimination von $(M^0)$ mittels Schema $\mathfrak{Q}$ möglich ist [23]).

---

[23]) Für die Reduktion des mit Teil II*, § 8,$\beta_3$, drittes erlaubtes Mischungsschema übereinkommenden Falles vergleiche das Verfahren in Fußn. 22.

Dasselbe gilt für die neben $(d_3^{m_{j_0}})$ $(j=1, 2, 3)$ (II*, § 8) kommenden Fälle bei Sukzedens der Endformel $\nu$ als Term enthaltend.

Der neben $(d_3^{m_{3_0}})$ tretende Fall ist:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\mathfrak{C}} \to \overline{\mathfrak{D}} \qquad \overline{\mathfrak{P}} \to \overline{\mathfrak{E}} \ \text{(Mischformel } \nu)}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^0 \to \overline{\mathfrak{D}}^0 + \overline{\mathfrak{E}}}\ \text{(erl. } M^0) \qquad \overline{\mathfrak{U}} \to \overline{\mathfrak{S}}}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^0 \cdot \overline{\mathfrak{U}}^* \to \overline{\mathfrak{D}}^{0*} + \overline{\mathfrak{E}}^* + \overline{\mathfrak{S}}}\ (M^0)$$

Rangniedrigung von $(M^0)$ ist hier einfach:

1° $\overline{\mathfrak{E}}$ enthält die Mischformel von $(M^0)$. Reduktion:

$$(Q, A_1)\ \dfrac{\dfrac{\overline{\mathfrak{C}} \to \nu \qquad \dfrac{\overline{\mathfrak{P}} \to \overline{\mathfrak{E}} \qquad \overline{\mathfrak{U}} \to \overline{\mathfrak{S}}}{\overline{\mathfrak{P}} \cdot \overline{\mathfrak{U}}^* \to \overline{\mathfrak{E}}^* + \overline{\mathfrak{S}}}\ (M^0)}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^0 \cdot \overline{\mathfrak{U}}^{*0} \to \overline{\mathfrak{E}}^* + \overline{\mathfrak{S}}}\ \text{(erl. } M^0)}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^0 \cdot \overline{\mathfrak{U}}^* \to \overline{\mathfrak{D}}^{0*} + \overline{\mathfrak{E}}^* + \overline{\mathfrak{S}}}\ (A_j, A_j^*)$$

2° $\overline{\mathfrak{E}}$ enthält die Mischformel von $(M^0)$ nicht; sie wird dann Faktor von $\overline{\mathfrak{D}}$ und $\not\equiv \nu$ sein. Reduktion:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\mathfrak{C}} \to \overline{\mathfrak{D}} \qquad \overline{\mathfrak{U}} \to \overline{\mathfrak{S}}}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{U}}^* \to \overline{\mathfrak{D}}^* + \overline{\mathfrak{S}}}\ (M^0) \qquad \overline{\mathfrak{P}} \to \overline{\mathfrak{E}} \ \text{(Mischformel } \nu)}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{U}}^* \cdot \overline{\mathfrak{P}}^0 \to \overline{\mathfrak{D}}^{*0} + \overline{\mathfrak{S}}^0 + \overline{\mathfrak{E}}}\ \text{(erl. } M^0)}{\overline{\mathfrak{C}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}^0 \cdot \overline{\mathfrak{U}}^* \to \overline{\mathfrak{D}}^{0*} + \overline{\mathfrak{E}} + \overline{\mathfrak{S}}}\ (A_j, A_j^*).$$

§ 16. Der Kalkül $LK^{(m)}$ läßt sich charakterisieren durch das in § 15 angegebene System von Schemata für $LK^{(g)}$ *ergänzt mit Schema* $Z_1$ (*in erweiterter Form*) $\dfrac{\overline{\mathfrak{A}} \to \mathrm{N}\mathfrak{B} + \overline{\mathfrak{D}}}{\overline{\mathfrak{A}} \to \mathrm{N}(\mathrm{N}\mathfrak{B}) + \overline{\mathfrak{D}}}$ [24]. *Fügt man nochmals die Schemata* $\Delta^*, Z_1^*$ *hinzu,* so bleibt der Umfang des Kalküls $LK^{(m)}$ ungeändert.

*Der Wortlaut des in Teil III,* § 15, 4° *gegebenen Hauptsatzes für* $LK^{(m)}$ *kann dann ungeändert beibehalten werden.*

Für die Beweise vergleiche Teil II*, § 9 und die Bemerkungen des vorigen Paragraphen.

§ 17. Der Kalkül $L(\bar{S}5)$ läßt sich charakterisieren durch das in § 15 angegebene System von Schemata für $LK^{(g)}$ *ergänzt mit Schema* $U$ (*in erweiterter Form*) $\dfrac{\overline{\mathfrak{A}} \to \mathrm{M}\mathfrak{B} + \overline{\mathfrak{D}}}{\overline{\mathfrak{A}} \to \mathrm{N}(\mathrm{M}\mathfrak{B}) + \overline{\mathfrak{D}}}$. *Fügt man nochmals die Schemata* $\Delta^*, U^* \cdot \dfrac{\mathrm{M}\mathfrak{P} \to \mathfrak{A}}{\mathrm{M}\mathfrak{P} \to \mathrm{N}\mathfrak{A}}$ *hinzu,* so bleibt der Umfang des Kalküls $L(\bar{S}5)$ ungeändert.

Neben dem negativen Resultat von II*, § 10 läßt sich analog beweisen: *Hält man den Wortlaut des in Teil III,* § 15, 4° *gegebenen Hauptsatzes für* $L(\bar{S}5)$ *ungeändert bei, so kann dieser nicht richtig sein*; im Gegensatz zu den übrigen Kalkülen *gelangt man in dieser Weise nicht zu einem Entscheidungsverfahren für* $L(\bar{S}5)$.

---

[24]) Siehe auch Teil II*, § 9.